Capítulo 8

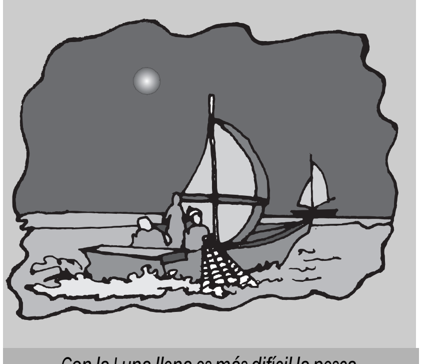
MOVIMIENTO PLANETARIO GRAVITACIÓN UNIVERSAL

MOVIMIENTO PLANETARIO

Uno de los problemas de gran discusión, desde tiempos antiguos hasta la actualidad, es precisamente el estudio de los cuerpos celeste, es decir el movimiento planetario. Fue la necesidad que obligó al hombre antiguo a la evolución del estudio de la Astronomía.

¿Por qué las estrellas no caen hacia la Tierra? ¿De dónde están suspendidas?

La vida de los pueblos antiguos estaban orientadas por los fenómenos celestes. Las actividades humanas estaban reguladas por la presencia y ausencia del Sol, la Luna, las estrellas, los vientos, etc. Inclusive hoy en día, gran parte de nuestros quehaceres están supeditado a la presencia de los mismos.



Con la Luna llena es más difícil la pesca.

En ciertas épocas, las noches son más largas que los días ¿Por qué?

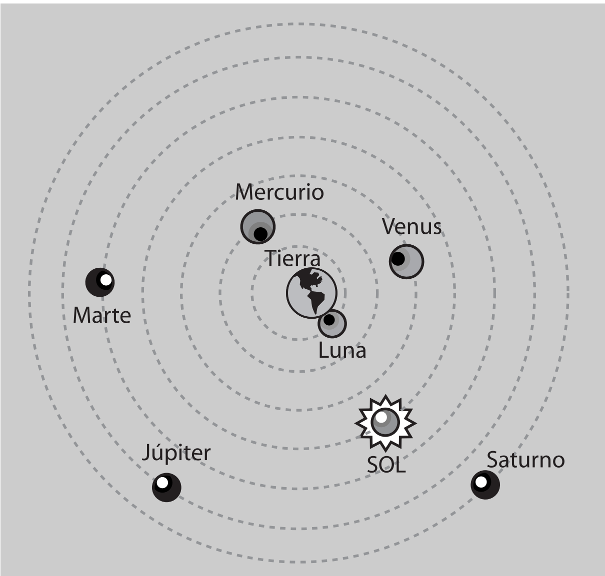
Pero, ¿Qué tiene que ver nuestra vida con el Sol, la Luna, los vientos, las estrellas?.- Muy fácil. No estamos solos, nuestro planeta pertenece a una galaxia y así también existen otras galaxias y todas estas al Universo.

Por todo lo explicado, no es de extrañar que el cielo haya sido objeto de investigación y que se hayan realizado muchos intentos para explicar el movimiento de los astros. Las diferentes posiciones de los astros fueron quizá, el motivo de gran estudio para los antiguos.

Los egipcios y los babilonios trataron de darle explicación certera al movimiento planetario, sin embargo sólo pudieron explicarlos mediante mitos y leyendas. Cabe mencionar que un negocio o desviación de este estudio es la Astrología, a través de los horóscopos, que en la actualidad todavía atrae a ciertas personas, las cuales creen inocentemente en dicho "Estudio".

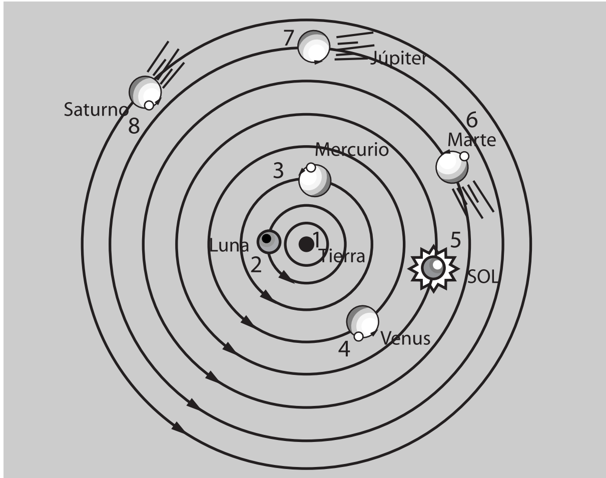
Los griegos, que consideraban al hombre como el centro del Universo, suponían que la Tierra era el centro geométrico del Universo y que los cuerpos celestes se movían alrededor de la Tierra.

Los cuerpos conocidos en aquel tiempo fueron ordenados de acuerdo con la distancia promedio a la Tierra; la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno.



Los Filósofos de esa época suponían que los planetas, el Sol, la Luna y las estrellas, estaban incrustadas en esferas que giraban en torno a la Tierra. A pesar de conseguir, con este modelo, una reproducción razonable de los movimientos observados, la necesidad de ajustarlo del modo conveniente a los hechos, obligó a los griegos a usar a veces un gran número de esferas para explicar el movimiento de un único planeta, con lo cual el "Universo Griego" resultó muy complicado.

En el siglo segundo de la Era Cristiana, el astrónomo Claudio Ptolomeo de Alejandría, estructuró un modelo planetario que tendría gran aceptación, que prevalecería durante la Edad Media. El suponía que todos los planetas se movían en círculos, cuyos centros giraban en torno a la Tierra.



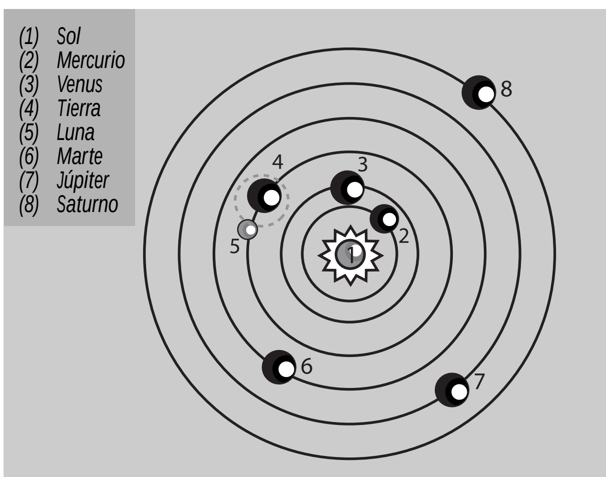
SISTEMA DE PTOLOMEO

Esta teoría parecía lógica, puesto que con esto se explicaba el movimiento retrógrado de algunos planetas, o sea que a veces se veía que un planeta se movía en cierto sentido y otras veces en sentido contrario.

Con el fin de mejorar esta teoría se le introdujeron ciertas modificaciones, hasta que terminó por ser una teoría muy confusa, lo que indujo a Alfonso X Rey de Castilla en el Siglo XII, a comentar que si hubiese sido consultado en la creación del Universo, habría hecho un mundo mejor y más simple.

Sin embargo, las ideas de Ptolomeo guardaban gran concordancia con la Iglesia Católica, ya que la "Suprema Creación" tenía que ser el hombre y como habitaba en la Tierra, pues, la Tierra tendría que ser el centro del Universo.

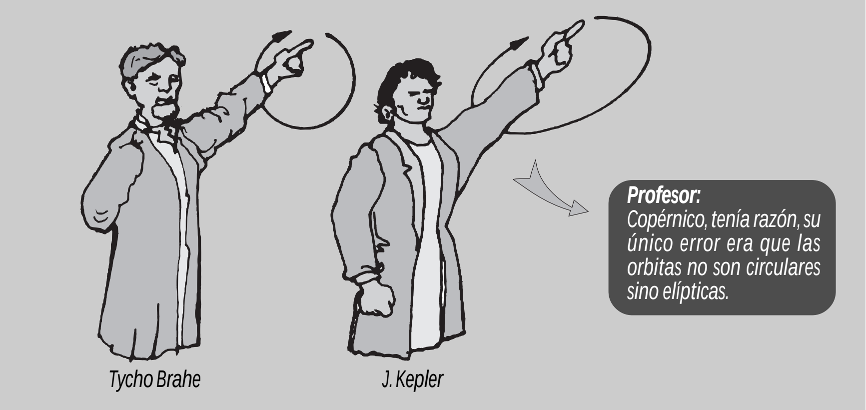
Esto se alimentó mucho más con algunas ideas vertidas por el filósofo Aristóteles, quien no tuvo mucha suerte en el campo de la Astronomía.



SISTEMA DE COPÉRNICO

Esta descripción fue aceptada como correcta hasta que en el siglo XVI el monje y astrónomo polaco Nicolás Copérnico, que buscaba una solución más simple, propuso describir el movimiento de todos los planetas en órbitas circulares; incluyendo la Tierra con respecto al Sol, el cual estaría en el centro. La idea no era nueva, había sido propuesta por primera vez por el astrónomo griego Aristarco alrededor del siglo III A.C. De acuerdo a Copérnico, el orden de las órbitas de los planetas, con respecto al Sol, era: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno; la Luna girando en torno a la Tierra.

Sin embargo; un sistema en que el Sol se consideraba inmóvil y la Tierra pasaba a ser un planeta en movimiento, como cualquiera de los otros era totalmente contrario a la Filosofía de la Iglesia.
Temiendo represalias por parte de la Inquisición, Copérnico se abstuvo durante mucho tiempo de publicar su libro. El primer ejemplar lo recibió en su lecho de muerte. Debido a está publicación, Copérnico fue tachado de loco y hereje; sus ideas fueron consideradas falsas y opuestas a las Sagradas Escrituras.
Tycho Brahe, con el deseo de demostrar que la teoría de Copérnico era falsa, realizó mediciones de las posiciones de los cuerpos celestes durante 20 años. Lo realizó con tanta precisión, que esas medidas fueron aprovechadas por su alumno, el alemán Johannes Kepler, quien descubrió que las órbitas que realizaban los planetas no eran circulares sino elípticas.



Así pues, el error que tuvo Copérnico fue admitir órbitas circulares para los planetas, siguiendo una antigua tradición griega que consideraba el círculo como curva perfecta; como el Universo era obra de Dios y por lo tanto una obra perfecta, las trayectorias de los planetas deberían ser circulares.

Los descubrimientos de Kepler se reducen a tres leyes que daremos a conocer en la síntesis que viene a continuación.

1.- TEORÍA GEOCÉNTRICA

Fue enunciada por Claudio Ptolomeo, quien sostenía que todos los cuerpos celestes giraban alrededor de la Tierra describiendo órbitas circulares. Es decir que se consideraba a la Tierra como el centro del Universo.

2.- TEORÍA HELIOCÉNTRICA

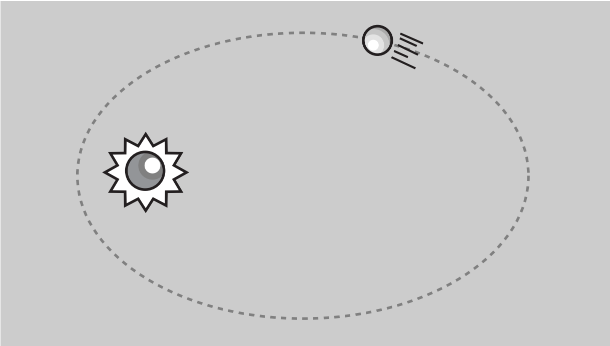
Fue enunciada por Nicolás Copérnico, quien sostenía que eran los planetas los que giraban alrededor del Sol describiendo órbitas circulares.
Años más tarde esta teoría fue apoyada por Galileo Galilei, quien utilizando su telescopio rudimentario también llegó a la conclusión que los planetas giraban alrededor del Sol.

3.- TEORÍA ACTUAL

Johannes Kepler, basado en las mediciones de su profesor Tycho Brahe, formuló las siguientes leyes:

A) *Ley de las Orbitas*

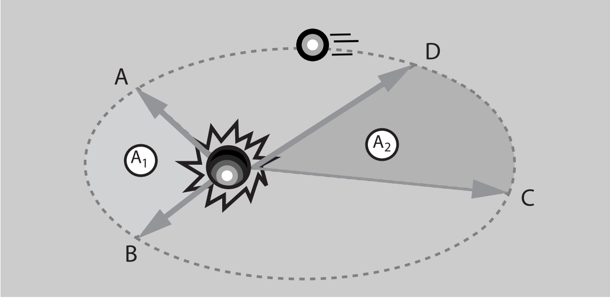
Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.



B) *Ley de la Áreas*

El área barrida por el radio vector que une el Sol con un planeta es la misma para tiempos iguales.

Si: $T_{AB} = T_{CD}$ Se cumple: $\boxed{A_1 = A_2}$



C) *Ley de los Períodos*

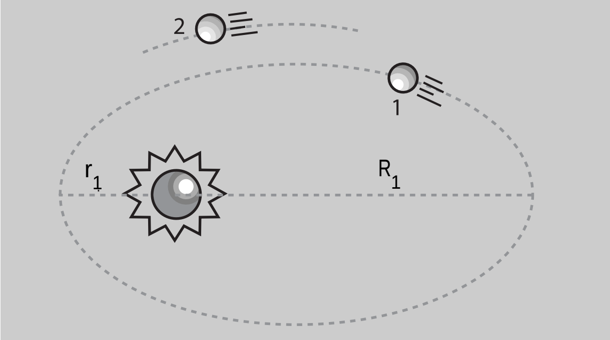
Cuando un planeta se mueve alrededor del Sol, se observa que el cuadrado de su período de revolución es directamente proporcional al cubo del radio vector medio.

Radio medio = R_M

$$R_{M_1} = \frac{R_1 + r_1}{2}$$

$$R_{M_2} = \frac{R_2 + r_2}{2}$$

$$\boxed{\frac{T_1^2}{R_{M_1}^3} = \frac{T_2^2}{R_{M_2}^3} = ... = \text{cte.}}$$



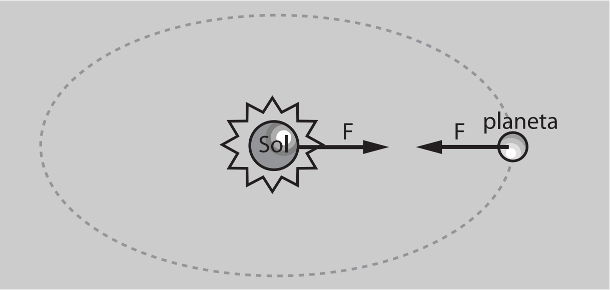
NOTA

Con las leyes de Kepler no significa que se hayan resuelto los enigmas del sistema solar y menos del Universo, aún falta mucho por descubrir.

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

El estudio del movimiento de los planetas, trajo como consecuencia que el famoso astrónomo Galileo (amigo de Kepler) se inclinara a defender la teoría de Copérnico, gracias a la ayuda del telescopio que el mismo inventara.

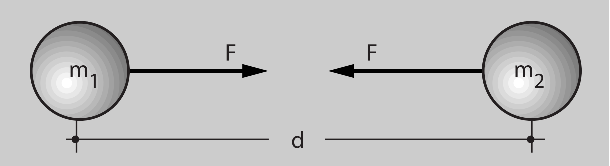
Sucede que los estudios realizados por Kepler y Galileo fueron la base para que Newton formulara su Ley de la Gravitación Universal. Newton, quien precisamente había nacido el mismo año que falleció Galileo, se preguntaba -¿Por qué los planetas giran en torno al Sol?-, llegó a la conclusión que una fuerza centrípeta obligaba a los planetas a realizar este movimiento; así pues, Newton nota que el Sol atraía a los planetas. Con cierta fuerza “F”; es más, Newton notó que cada planeta atraía también al Sol. Newton descubrió también que no solo los planetas se atraen, sino que todos los cuerpos experimentan una atracción mutua.



LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

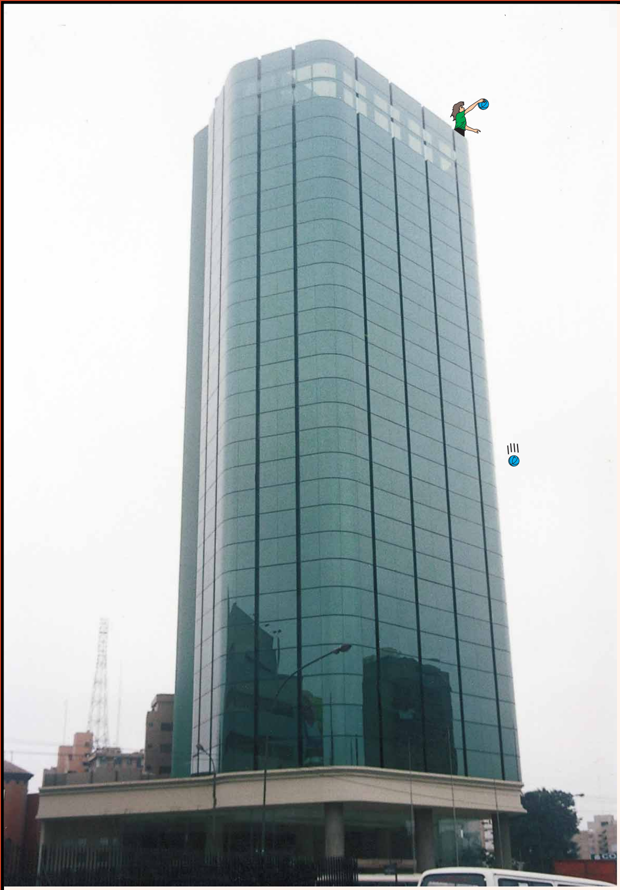
“Dos cuerpos cualesquiera en el Universo, se atraen con una fuerza que es directamente proporcional a cada una de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros.”

$$\boxed{F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}} \qquad G = 6,67 \times 10^{-11}\,\frac{N \times m^2}{kg^2}$$



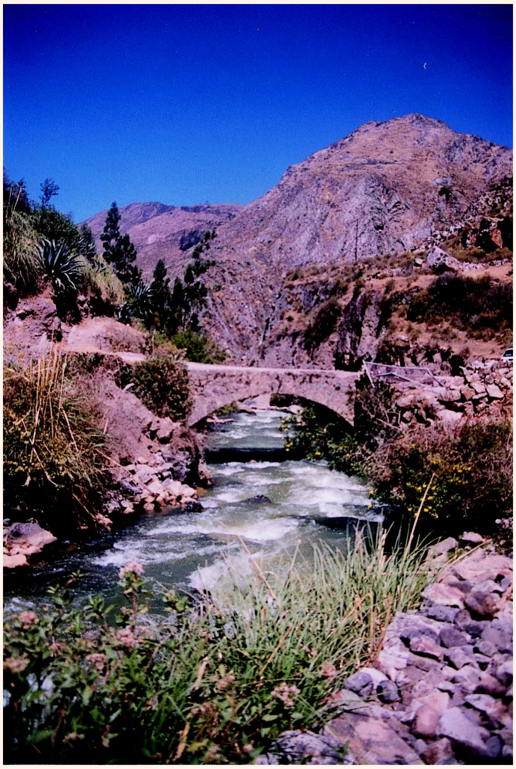
Algunos Valores:

Radio de la Tierra : R_T = 6 370 km
Masa de la Tierra : $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Volumen de la Tierra : $V_T = 1{,}09 \times 10^{27}$ cm^3
Densidad de la Tierra : $D_T = 5{,}5$ g/cm^3



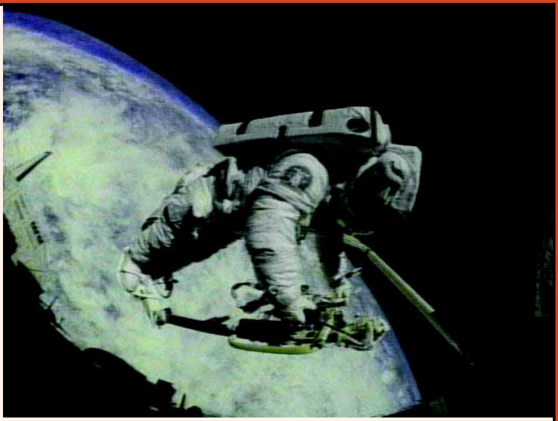
Los cuerpos caen

¿Porqué los cuerpos no caen hacia arriba?, en realidad muchas personas se hacen esta pregunta en algún momento; sin embargo los términos “arriba” y “abajo” son relativos y dependen enteramente de la posición del observador. Cuando un cuerpo es soltado desde cierta altura, éste se ve atraída por la Tierra con cierta fuerza llamada peso (fuerza gravitacional); como quiera que la fuerza es una magnitud vectorial, tiene dirección y sentido; la Tierra atrae al cuerpo en mención hacia su centro. De todo lo expuesto hay que precisar que lo correcto es decir: “el cuerpo cae hacia el centro de la Tierra”.



Aguas abajo

Las aguas del río aprovechan la pendiente del mismo, no podría existir un río plano. Cada partícula de agua tiene una componente de su peso en la dirección del plano del río que hace que la masa del agua se muevan “aguas abajo”.
Este mismo principio se usa en los sistemas de alcantarillado, canales de irrigación, etc.



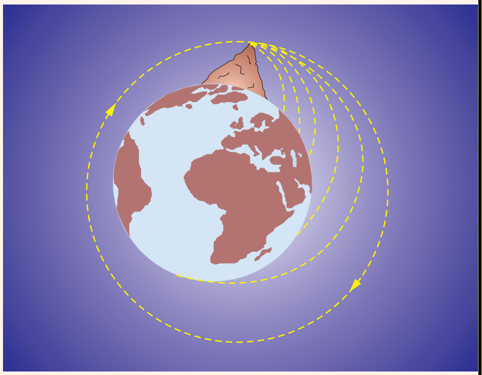
El peso de un astronauta en la Luna

La fuerza de atracción que un planeta ejerce sobre otro cuerpo, toma el nombre de peso; dicha fuerza se rige mediante la siguiente expresión.

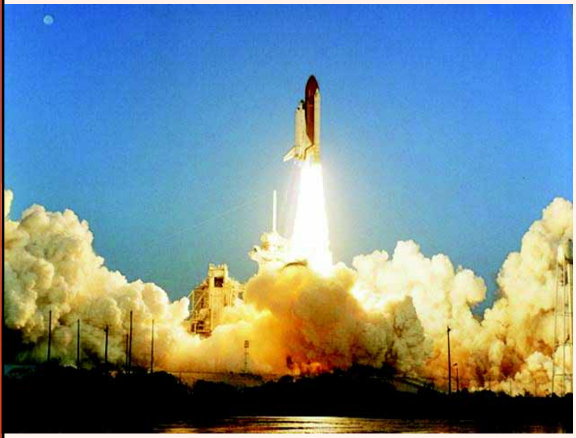
$$F = \frac{GmM}{d^2}$$

Donde "M" es la masa del planeta o cuerpo celeste; en virtud a ello, es que se puede afirmar.
Mayor masa del planeta o cuerpo celeste $\Rightarrow$ mayor fuerza F.
Menor masa del planeta o cuerpo celeste $\Rightarrow$ menor fuerza F. Como quiera que la Tierra tiene mayor masa que la Luna; una persona pesará más en la Tierra que en la Luna y por tanto flotará en la Luna como lo hace un papel en la Tierra (exagerando un tanto).

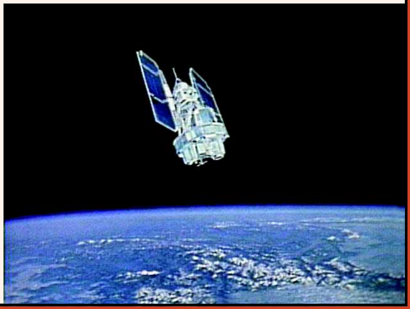
¿Cómo lanzar un satélite artificial?



Newton fue uno de los primeros científicos que consideró la posibilidad de lanzar un cuerpo desde una cima muy alta y hacerlo girar alrededor de la Tierra gracias al lanzamiento con un cañón; sin embargo, apoyándonos en las ecuaciones de gravitación universal podemos calcular fácilmente la velocidad necesaria que requiere el proyectil para realizar tan fabulosa aventura; ésta es v = 8 km/s = 28 800 km/h; no existe un misil que empuje al proyectil a tanta velocidad.



Para poner en orbita alrededor de la Tierra un cuerpo; es necesario el uso de una nave espacial, la cual está comformada por la nave en sí y un cohete cuyo interior está compuesto por un conjunto de almacenes de combustible para posteriormente quemarlo y formar grandes nubes de gas los cuales escapan con fuerza hacia atrás, mientras que la nave es empujada hacía arriba. En realidad un cohete tiene varios sub-cohetes, la primera hace que la nave alcance una velocidad de 9 500 km/h, para después ser dejado caer al océano; la segunda hace que la nave alcance 22 500 km/h; mientras que la tercera alcanza la velocidad de 28 800 km/h que es la velocidad mínima que necesita un cuerpo para que gire en orbita alrededor de la Tierra; en ese momento la altura promedio es de 190 km.
Estando la nave a dicha velocidad; se puede lanzar el "satélite artificial" con una velocidad tangencial, el cual quedará en orbita.



TEST

1.- Para determinar la atracción gravitacional entre dos cuerpos, es necesario conocer:

a) Sus masas y la distancia entre ellas.
b) Sus velocidades orbitales y sus masas.
c) Sus velocidades orbitales y la distancia entre ellas.
d) Sus masas, la distancia entre ellas y sus velocidades.
e) Solo sus masas.

2.- La velocidad mínima para que un cuerpo se mantenga en órbita alrededor de la Tierra, es de aproximadamente.

a) 1 km por segundo.
b) 15 km por segundo.
c) 3 km por segundo.
d) 8 km por segundo.
e) No se puede predecir.

3.- Respecto al movimiento planetario señalar verdadero o falso:

I.- El período de movimiento es proporcional a la distancia media al Sol.
II.- Barren áreas iguales en tiempos iguales en sus respectivas orbitas.
III.- Todos los planetas describen orbitas hiperbólicas y parabólicas.

a) FFF
b) VVF
c) FVF
d) VFV
e) VVV

4.- Relaciona correctamente:

I.-	Teoría Geocéntrica.	(a)	Lord Cavendichs
II.-	Teoría Heliocéntrica.	(b)	Isaac Newton
III.-	Descubrimiento de la constante de gravitación universal.	(c)	Nicolás Copérnico
IV.-	Ley de Gravitación Universal.	(d)	Claudio Ptolomeo

a) I c, II a, III b, IV d
b) I c, II d, III a, IV a
c) I a, II b, III c, IV d
d) I b, II c, III a, IV d
e) I d, II a, III c, IV b

5.- Señalar verdadero o falso, respecto al movimiento planetario y la Ley de Gravitación Universal.

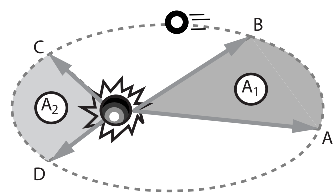
I. La teoría geocéntrica fue sostenida por Claudio Ptolomeo y apoyada por Galileo Galilei.
II. El radio vector que une el Sol con un planeta, recorre arcos iguales en tiempos iguales.
III. Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

a) FVV
b) VVV
c) VVF
d) FFV
e) FFF

6.- Señalar la alternativa incorrecta respecto a la Ley de Gravitación Universal.

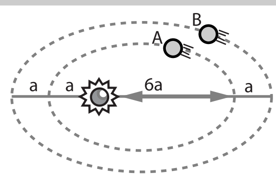
a) La fuerza gravitatoria es proporcional al producto de las masas.
b) La fuerza gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las masas.
c) El campo gravitatorio es un campo energético vectorial.
d) La constante de gravitación es variable con el tiempo y de acuerdo a los cuerpos que interactúan.
e) Los cuerpos ubicados en la superficie de los planetas soportan la mayor fuerza gravitatoria.

7.- Un planeta barre las áreas observadas en la figura, siendo $A_1 = 3\,A_2$ ¿Qué podría opinar de los tiempos transcurridos?



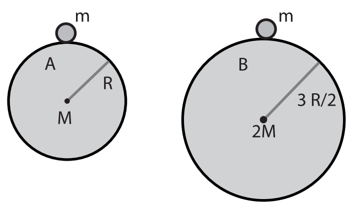
a) $T_{AB} = 1/3\ T_{CD}$
b) $T_{AB} = T_{CD}$
c) $T_{AB} = 3\,T_{CD}$
d) $T_{AB} = 9\,T_{CD}$
e) $T_{AB} = 27\,T_{CD}$

8.- Hallar la relación entre los períodos de los planetas "A" y "B" alrededor del Sol, conociendo los datos de la figura.



a) $T_A = T_B$
b) $T_A = 7/9\,T_B$
c) $T_A = 9/7\,T_B$
d) $T_A^2 = (7/9)T_B^2$
e) $\dfrac{T_A^2}{T_B^2} = \dfrac{7^3}{9^3}$

9.- En la figura, la masa "m" tiene un peso "P" en el planeta "A" ¿Cuál es su peso en el planeta "B"?



a) $\frac{3}{2}P$

b) $\frac{P}{2}$

c) 2P

d) $\frac{8}{9}P$

e) $\frac{2}{3}P$

10.- El peso de una masa "m" sobre la superficie de un planeta es "P" ¿Cuál será su peso a una altura igual al radio del planeta respecto a su superficie?

a) $\frac{P}{2}$

b) 2P

c) 4P

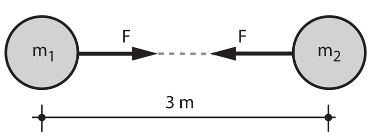
d) $\frac{P}{4}$

e) $\frac{P}{8}$

PROBLEMAS RESUELTOS

A PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Se tiene dos cuerpos de masa m_1 y m_2 separados 3 m como muestra la figura. Calcular la fuerza de atracción.



$m_1 = 3\times10^7$ kg

$m_2 = 3\times10^5$ kg

Solución:

❑ Datos:

$$G = 6{,}67\times10^{-11}\frac{N\times m^2}{kg^2} \quad ; \quad d = 3m$$

$$m_1 = 3\times10^7\ kg \quad ; \quad F = ?(N)$$

$$m_2 = 3\times10^5\ kg$$

❑ De la fórmula:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

$$F = \frac{\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(3\times10^7\right)\left(3\times10^5\right)}{(3)^2}$$

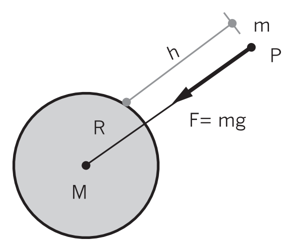
$$F = 6{,}67\times10^1$$

$$\boxed{F = 6{,}67\ N}$$

2.- Determinar una expresión que nos permita calcular la aceleración de la gravedad en cualquier punto respecto a la Tierra.

Solución:

❑ En el punto "P"



F = peso = mg

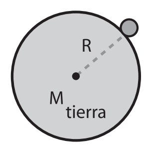
$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = mg$$

De donde: $\boxed{g = \frac{GM}{(R+h)^2}}$

3.- Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

Solución:

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$



Superficie de la Tierra: $h = 0$

Luego: $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{N \times m^2}{kg^2}$$

$$M_T = 5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6\,370\,000 \text{ m}$$

Reemplazando:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}8$$

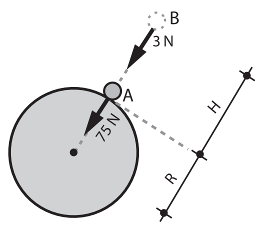
$$\boxed{g = 9{,}8 \text{ m/s}^2}$$

4.- Un cuerpo pesa al nivel del mar 75 N; ¿a qué altura debe elevarse para que su nuevo peso sea 3 N? (dar su respuesta en función de R = radio terrestre).

Solución:

❑ En la superficie (punto A)

$$\frac{GMm}{R^2} = 75 \quad \text{........... (1)}$$



❑ En el punto B:

$$\frac{GMm}{(R+H)^2} = 3 \quad \text{........... (2)}$$

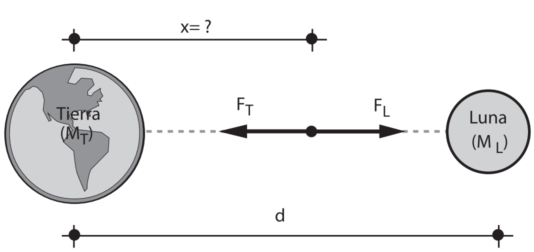
❑ De (1) y (2):

$$\left(\frac{R+H}{R}\right)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = 4R}$$

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- La separación entre la Tierra y la Luna es "d", ¿en qué lugar del espacio entre estos dos cuerpos, se debe colocar una pequeña masa para que se encuentre el equilibrio si $M_T = 81\, M_L$?, dar como respuesta en función de "d".

Solución:



❑ Equilibrio:

$$F_T = F_L$$

$$\frac{GM_T}{x^2} = \frac{GM_L}{(d-x)^2}$$

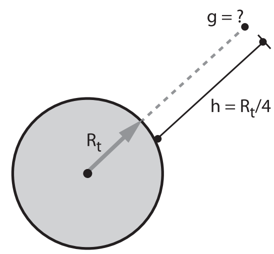
$$\frac{G(81M_L)}{x^2} = \frac{GM_L}{(d-x)^2}$$

$$\left(\frac{9}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{d-x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{x} = \frac{1}{d-x}$$

$$\boxed{x = 0{,}9\, d}$$

2.- Hallar la gravedad a una altura igual a 1 600 km sobre la superficie terrestre, asumiendo que el radio terrestre es R_t = 6 400 km.

Solución:



$$1\,600 = \frac{6\,400}{4} = \frac{R_t}{4}$$

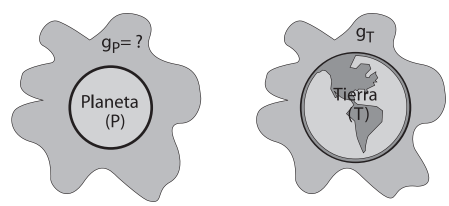
$$g = \frac{GM}{(R_t + h)^2}$$

$$g = \frac{GM}{\left(R_t + \frac{R_t}{4}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM}{\left(\frac{5}{4}R_t\right)^2} = \frac{16}{25} g_t$$

$$g = \frac{16}{25}(9{,}8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = 6{,}27 \text{ m/s}^2}$$

3.- ¿Cuánto pesará un cuerpo de 20 N en un planeta cuya densidad promedio es el triple de la densidad promedio terrestre y cuyo radio es la tercera parte del radio terrestre?, considere a los planetas como esferas perfectas. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Solución:



❑ Datos:

$$D_P = 3D_T \quad ; \quad R_P = \frac{R_T}{3}$$

❑ Para calcular el peso de un cuerpo de 20 N en el planeta (P), bastará calcular (g_P) en función de g_T.

❑ Partiendo de: $D_P = 3D_T$

$$\frac{m_P}{V_P} = 3\frac{m_T}{V_T}$$

$$m_P = 3m_T\left(\frac{V_P}{V_T}\right) = 3m_T\left(\frac{\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}\right)$$

$$m_P = 3m_T\frac{R_P^3}{R_T^3}$$

❑ **Ahora:** En la superficie del planeta

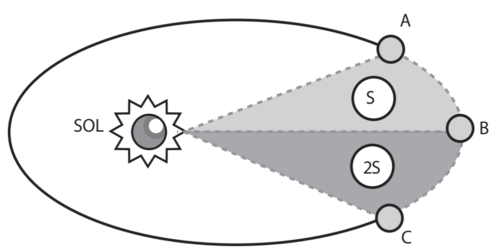
$$g_P = \frac{Gm_P}{R_P^2} = G\left(\frac{\frac{3m_T R_P^3}{R_T^3}}{R_P^2}\right) \Rightarrow g_P = \frac{3Gm_T}{R_T^2}\left(\frac{R_P}{R_T}\right)$$

$$g_P = 3g_T\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow g_P = g_T$$

❑ Finalmente:

$$\boxed{W_{\substack{\text{cuerpo en}\\ \text{el planeta}}} = W_{\substack{\text{cuerpo en}\\ \text{la Tierra}}} = 20\,\text{N}}$$

4.- En la figura mostrada, un planeta demora 4 meses en hacer el recorrido AB. ¿Qué tiempo emplea el planeta en el recorrido BC?



Solución:

Ley de las Áreas:

El área barrida por el radio vector que une el Sol con un planeta es la misma para tiempos iguales.

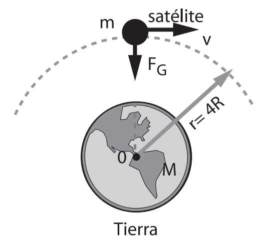
❑ Luego: S ———— 4 meses
2S ———— t

t = 8 meses

❑ Finalmente: $\boxed{t_{BC} = 8\,\text{meses}}$

5.- ¿Con qué velocidad lineal se traslada un satélite alrededor de la Tierra si su órbita se encuentra a una altura h = 3R sobre la superficie de la Tierra?. Dar la respuesta en términos de G, M (masa de la Tierra) y R (radio de la Tierra).

Solución:



❑ $F_C = F_G$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{4R}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

6.- Si la masa de la Tierra es 80 veces la de la Luna y su radio 4 veces el de ésta, ¿qué tiempo tardará en alcanzar la altura máxima, un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba en la Luna, con una velocidad de 20 m/s?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} M_T = 80M_L \\ R_T = 4R_L \\ g_L = ? \end{array}\right\} \quad g_L = \frac{GM_L}{R_L^2} = \frac{G\left(\frac{M_T}{80}\right)}{\left(\frac{R_T}{4}\right)^2}$$

$$g_L = \frac{GM_T}{5R_T^2} = \frac{g}{5} = \frac{9,8}{5}$$

$$\boxed{g_L = 1,96\,\text{m/s}^2}$$

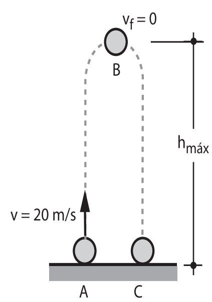
❑ Cuando el cuerpo es lanzado en la superficie de la Luna.

$t_{AB} = ?$

$v_F = v_o - g_L t_{AB}$

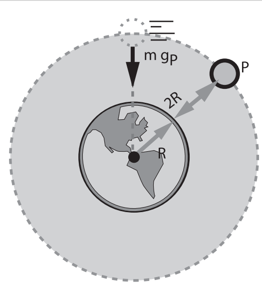
$0 = 20 - (1,96)t_{AB}$

$\boxed{t_{AB} = 10,20\,\text{s}}$



7.- Determinar el período de revolución de un satélite artificial de la "Tierra", el cual se encuentra a una altura igual al doble del radio terrestre:
g : aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.
R : radio terrestre.

Solución:



❑ Calculando la aceleración de la gravedad en P.

$$g_P = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{(R+2R)^2} \Rightarrow g_P = \frac{GM}{9R^2}$$

$$g_P = \frac{g}{9}$$

Siendo : g, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

❑ $F_C = \text{peso} = mg_P$

$$m\omega^2(\text{radio}) = mg_P$$

$$m\omega^2(3R) = mg_P \Rightarrow m\omega^2(3R) = m\left(\frac{g}{9}\right)$$

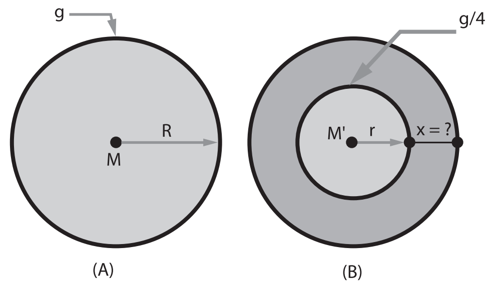
$$\omega^2 = \frac{g}{27R} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{27R}$$

$$\boxed{T = 6\pi\sqrt{\frac{3R}{g}}}$$

8.- Si el radio terrestre es "R". ¿A qué profundidad de la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad es el 25% de su valor en la superficie?

Solución:

Aparentemente se puede creer que a medida que uno se introduce al globo terráqueo, la aceleración de la gravedad aumenta, en realidad sucede lo contrario (g disminuye). Esto se debe a que la masa atractiva también disminuye.



❑ Caso "B":

$$g_B = \frac{GM'}{r^2}$$

$$\frac{g}{4} = \frac{GM'}{r^2} \quad \text{.......... (1)}$$

❑ Nótese que la densidad es la misma.

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

De donde: $M' = \frac{M \cdot r^3}{R^3}$ .... (2)

❑ (2) en (1):

$$\frac{g}{4} = \frac{G}{r^2}\frac{Mr^3}{R^3} = \frac{GM}{R^2}\frac{r}{R} \Rightarrow \frac{g}{4} = g\left(\frac{r}{R}\right) \Rightarrow r = \frac{R}{4}$$

❑ Nos piden: x = ?

$$x = R - r = R - \frac{R}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3R}{4}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

A PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Si la aceleración de la gravedad en la Luna es 1/6 del valor de la aceleración de la gravedad terrestre. ¿Cuánto pesará en la Luna un astronauta, que en Tierra pesa 800 N? (g_{Tierra} = 10 m/s^2).

Rpta. 133,33 N

2.- ¿A qué altura debe elevarse un cuerpo, para que su peso sea la mitad del que tiene en la superficie de la Tierra? (g_{Tierra} = 10 m/s^2 ; R_T = 6 400 km).

Rpta. h = 2 560 km

3.- Si en Júpiter la aceleración de la gravedad es 2,64 veces mayor que la terrestre. ¿Cuánto pesará una persona de 70 kg?

Rpta. 1 811 N

4.- ¿Con qué velocidad debe dispararse un cuerpo verticalmente y hacia arriba desde la superficie terrestre, para que alcance una altura igual al doble del radio de la Tierra? (g_{Tierra} = 10 m/s^2 ; R_T = 6 400 km).

Rpta. 9,24 km/s

5.- Dos planetas A y B giran alrededor de una estrella. El planeta A demora en dar 1 vuelta 365 días y el planeta

B demora 2 920 días. ¿Cuál es la relación (R_A/R_B) siendo R_A y R_B los radios de sus orbitas?

Rpta. $\boxed{\dfrac{R_A}{R_B}=\dfrac{1}{4}}$

6.- ¿A qué distancia del centro de la Tierra debe estar una nave espacial en vuelo hacia la Luna para que ahí soporte una fuerza de gravedad nula. Si la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es 384 000 km y la masa terrestre es 81 veces la masa de la Luna?

Rpta. $\boxed{345\,600 \text{ km}}$

7.- Determinar el período de revolución de un satélite artificial de la Tierra el cual se encuentra a una altura igual al doble del radio terrestre. Determinar la velocidad tangencial con que gira. (g_T = 10 m/s^2 ; R_T = 6 400 km)

Rpta. $\boxed{\begin{array}{l} T = 7{,}25 \text{ h} \\ v = 4{,}62 \text{ km/s} \end{array}}$

8.- Si la Luna está a 60 radios terrestres del centro de la Tierra, ¿Cuál es el valor de la aceleración de la gravedad terrestre, sobre nuestro satélite, si el valor promedio de g en la superficie de la Tierra es 9,8 m/s^2?

Rpta. $\boxed{0{,}002\,72 \text{ m/s}^2}$

9.- La densidad de Marte es aproximadamente 5/8 de la densidad de la Tierra; y su radio es 16/25 del radio de la Tierra. ¿Cuál es el valor de la aceleración de la gravedad en Marte? (g_{Tierra} = 10 m/s^2).

Rpta. $\boxed{4 \text{ m/s}^2}$

10.- El satélite "INTELSAT", usado para transmitir vía satélite, siempre está sobre el Brasil. ¿A qué distancia de la superficie de la Tierra se encuentra?

Rpta. $\boxed{h=\sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}-R}$

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- ¿A qué altura un cuerpo tendrá un peso que es 1/3 del que tiene en la superficie de la Tierra?
R : radio terrestre.

Rpta. $\boxed{R\left(\sqrt{3}-1\right)}$

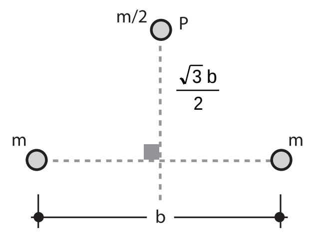
2.- Un cuerpo en la superficie terrestre pesa un promedio de 800 N; a 1 000 km sobre la superficie de la Tierra, ¿cuál será su peso?

Rpta. $\boxed{597 \text{ N}}$

3.- El tren lunar (conjunto módulo de servicio, módulo de comando, módulo de alunizaje) del proyecto Apolo para la conquista de la Luna, tiene 63 000 kg de masa. ¿Cuál será su peso cuando está en Tierra y cuál a 200 km de altura? (g_{Tierra} = 10 m/s^2).

Rpta. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Peso en Tierra} = 6{,}3\times10^5 \text{ N} \\ \text{Peso en (h = 200 km)} = 5{,}9\times10^5 \text{ N} \end{array}}$

4.- En la figura, se muestra las posiciones relativas de tres masas en un instante dado. Dos masas iguales "m" separadas una distancia "b" y una tercera masa "m/2" en un punto P equidistante de las otras dos. Calcular la aceleración de la masa colocada en el punto P.



Rpta. $\boxed{a=\dfrac{Gm\sqrt{3}}{b^2}}$

5.- Un meteorito se encuentra inicialmente en reposo a una distancia del centro de la Tierra igual a seis veces el radio de la Tierra. Calcular la velocidad que tendría al llegar a la superficie de la Tierra (g = 10 m/s^2).

Rpta. $\boxed{v=\dfrac{400}{3}\sqrt{10} \text{ m/s}}$

6.- Si el radio terrestre es "R" y suponemos que la Tierra es esférica, maciza y homogénea. ¿A qué profundidad de la superficie terrestre la aceleración de la gravedad es el 25% de su valor en la superficie?

Rpta. $\boxed{\dfrac{3R}{4}}$

7.- Un cuerpo se ha lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_o. Determinar la altura H alcanzada teniendo en cuenta que la variación de la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. La resistencia del aire se desprecia. El radio de la Tierra es 6 400 km y v_o = 1 km/s

Rpta. $\boxed{50 \text{ km}}$

8.- ¿Con qué velocidad debe dispararse un proyectil para que escape del campo gravitatorio terrestre como mínimo?

Rpta. $\boxed{11{,}18 \text{ km/s}}$